

Das Temperatur- und Strömungsfeld in einem wandstabilisierten, magnetisch abgelenkten Bogen *,**

KARL SAUTER

Elektrophysikalisches Institut der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforsch. 24 a, 1694—1706 [1969]; eingegangen am 7. Juni 1969)

The influence of the Lorentz forces – caused by a stationary transverse uniform magnetic field – and the thereby induced flow field on a wall-stabilized electric arc in argon is experimentally investigated. The unsymmetrical temperature fields in the arc discharge cross-section for different values of arc current and magnetic field are determined by measuring the continuum radiation absolutely. The material functions of argon are taken from recently published literature; the specific radiation $u(T)$ is evaluated from our measurements.

The convective term of the energy equation provides the component of the flow velocity parallel to $\text{grad } T$; herefrom, together with the continuity equation, the flow field is calculated. The evaluation of the momentum equation shows that within the main part of the arc-cross-section the Lorentz force is essentially compensated by a pressure gradient and not by inertial or viscous forces. The consistency of the results verifies the measurements, the applied material functions and the evaluation procedures.

Die Wirkung eines transversalen Magnetfeldes auf einen stationären elektrischen Lichtbogen und das dadurch erzeugte Strömungsfeld werden in der vorliegenden Arbeit experimentell untersucht. Die Klärung dieser Vorgänge ist nicht nur von grundlegendem Interesse, sondern hat auch für Anwendungen in der Astrophysik und Raumfahrttechnik, aber auch für die Schaltertechnik u. a. Bedeutung gewonnen. Magnetische Felder und Strömungsfelder üben auf Lichtbögen als bewegliche stromführende Leiter erhebliche Wirkungen aus, die je nach den vorherrschenden Bedingungen zu einer großen Mannigfaltigkeit von Erscheinungen führen. Eine Übersicht über die bisherigen Arbeiten geben FINKELNBURG und MAECKER¹ und MYERS und ROMAN².

Zur experimentellen und theoretischen Untersuchung der geschilderten Zusammenhänge besonders geeignet ist der wandstabilisierte, magnetisch abgelenkte Bogen. Auf das stromführende Bogenplasma wirken als Folge des äußeren Magnetfeldes, wie auf jeden stromführenden Leiter, Lorentz-Kräfte, die eine Gasströmung in Form eines Wirbelpaars erzeu-

gen. Das Temperaturmaximum wird dadurch in Richtung der Lorentz-Kraft aus der Rohrachse verschoben, die Temperaturverteilung und damit die Wärmeableitung zur stabilisierenden Kaskadenwand sind nicht mehr rotationssymmetrisch. Der stationäre Bogenzustand ist im wesentlichen durch die Angabe der *Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilung* über dem Bogenquerschnitt gekennzeichnet. Erste quantitative Aussagen über die Vorgänge in einem solchen Bogen machen in jüngster Zeit theoretische Untersuchungen von FISCHER und UHLENBUSCH³ und SEEGER⁴, sowie eine experimentelle Arbeit von ROSENBAUER⁵. Im Gegensatz zu den bisherigen Arbeiten werden bei der vorliegenden Untersuchung durch die Wahl hoher Bogenströme und starker Magnetfelder die Trägheitskräfte in der Strömung miterfaßt. Die im folgenden beschriebene Anordnung zeichnet sich durch wohldefinierte Bedingungen aus, in experimenteller Hinsicht durch sehr gute Stabilität, Reproduzierbarkeit und genaue Meßmöglichkeiten, in theoretischer Hinsicht durch die exakten, mathematisch gesehen, einfachen Randbedingungen.

Sonderdruckanforderungen erbeten an Dr. K. SAUTER, D-3000 Hannover, Wöhlerstr. 7.

* Auszug aus der von der Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik der Technischen Hochschule München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigten Dissertation. Tag der Promotion: 10. 7. 1968.

** Auszugsweise auch vorgetragen auf der Frühjahrstagung des Fachausschusses Plasma- und Gasentladungsphysik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Stuttgart 1968.

¹ W. FINKELNBURG u. H. MAECKER, Handbuch der Physik XXII, Springer, Berlin 1956.

² T. W. MYERS u. W. C. ROMAN, ARL 66-0184 [1966].

³ E. FISCHER u. J. UHLENBUSCH, Proc. VII. Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Beograd, Vol. I, 725 [1966].

⁴ G. SEEGER, Z. Angew. Phys. 25, 23 [1968].

⁵ H. ROSENBAUER, Verhandl. DPG (VI), 2, 299 [1967].



1. Plasmamodell und Gleichungssystem

Bei den vorherrschenden Versuchsbedingungen kann das Bogenplasma durch ein Kontinuumsmodell beschrieben und somit die Untersuchung der Vorgänge im Plasma auf die Betrachtung makroskopischer Größen reduziert werden. Nach einer von MENTEL u. a.⁶ aus den Ergebnissen einer Arbeit über Transporteigenschaften ionisierter Gase im thermischen Nichtgleichgewicht von CHMIELESKI und FERZIGER⁷ abgeleiteten Formel sind die Abweichungen des Bogenplasmas vom lokalen thermischen Gleichgewicht (L.T.G.) für Temperaturen $T > 8500^{\circ}\text{K}$ vernachlässigbar — ein Ergebnis, das mit den theoretischen und experimentellen Befunden verschiedener Autoren (FINKELNBURG¹, KOLESNIKOV⁸, GRIEM⁹ u. a.) übereinstimmt. Eine Störung des L.T.G. durch schnelle zeitliche oder starke örtliche Änderungen der Plasmabedingungen infolge sehr hoher Gasgeschwindigkeit oder steiler Temperaturgradienten kann bei den vorliegenden Versuchsbedingungen ausgeschlossen werden. Die Existenz einer einheitlichen lokalen Temperatur der verschiedenen Teilchenarten rechtfertigt die Verwendung des sog. Einflüssigkeitsmodells der Magnetogasdynamik, das bei stationären Vorgängen durch das folgende Gleichungssystem gekennzeichnet ist (z. B. FINKELNBURG¹, PAI¹⁰, CAMEL¹¹):

$$\text{div } \varrho \mathbf{v} = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung} \quad (1)$$

$$\varrho (\mathbf{v} \text{ grad } \mathbf{v}) = - \text{grad } p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \text{Impulsgleichung} \quad (2)$$

$$\varrho c_p \mathbf{v} \cdot \text{grad } T = \text{div} (\varrho \text{ grad } T) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - u \quad \text{Energiegleichung} \quad (3)$$

$$p = \varrho R T \quad \text{Zustandsgleichung} \quad (4)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{j} \quad \text{Durchflutungsgesetz} \quad (5)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad \text{Induktionsgesetz} \quad (6)$$

$$\text{div } \mathbf{j} = 0 \quad \text{elektr. Kontinuitätsgl.} \quad (7)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E} \quad \text{Ohmsches Gesetz.} \quad (8)$$

$\boldsymbol{\tau}$ ist der Reibungstensor, u die spezifische Abstrahlung, d. h. die pro Zeit- und Volumeneinheit emittiert

ierte transparente Strahlungsenergie; die anderen Größen haben ihre übliche Bedeutung. Abschätzungen ergeben, daß die folgenden Beiträge im System der Gln. (1) bis (8) mit Recht vernachlässigt wurden: der Einfluß des Magnetfeldes auf die Transportkoeffizienten, in der Impulsgleichung die Schwerkraft und das magnetische Eigenfeld des Bogens, in der Energiegleichung die kinetische Energie, die Leistung der Reibungskräfte und die Strahlungsaufnahme, im Ohmschen Gesetz die induzierte elektrische Feldstärke $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Werden die im System der Gln. (1) bis (8) enthaltenen Materialfunktionen als bekannt vorausgesetzt, so genügen bei Vorgabe ausreichender Randbedingungen die Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Vektor- und Skalarfelder. Unter der Annahme vernachlässigbarer Trägheitskräfte, der Voraussetzung $\text{div } \mathbf{v} = 0$ und der Beschränkung auf kleine Auslenkungen berechneten FISCHER und UHLENBUSCH³ durch einen Iterationsprozeß Temperatur- und Strömungsfelder. SEEGER⁴ ermittelte, ebenfalls unter der Annahme schleichender Strömung, für ein vorgegebenes Bogenmodell (Stromfadenmodell) das Strömungsfeld aus der Impulsgleichung auf analytischem Wege. Bei vorgegebener Temperaturverteilung über dem Bogenquerschnitt — sie wird in der vorliegenden Arbeit gemessen — kann das Geschwindigkeitsfeld nicht nur aus der Impulsgleichung, sondern auch aus dem konvektiven Glied der Energiegleichung, jeweils unter Hinzunahme der Kontinuitätsgleichung, berechnet werden; der erste Weg führt zu einem Randwertproblem, der zweite Weg, der hier eingeschlagen wird, zu einem numerisch einfacher lösbar Anfangswertproblem. Die Zustandsgleichung (4) geht bei den geringen auftretenden Druckänderungen ($\Delta p/p < 0,3\%$) in die Beziehung $\varrho = \varrho(T)$ über. Die Dichte ϱ und die übrigen Materialfunktionen $c_p(T)$, $\varrho(T)$, $\sigma(T)$ und $\eta(T)$ für Argon, deren Druckabhängigkeit ebenfalls vernachlässigt werden kann, werden zur Auswertung der neueren Literatur entnommen (ϱ und c_p nach OLSEN¹²; ϱ und σ nach BUES u. a.¹³; η nach DEVOTO¹⁴; der Vergleich

⁶ K. BEHRINGER, W. KOLLMAR u. J. MENTEL, Z. Phys. **215**, 127 [1968].

⁷ R. M. CHMIELESKI u. J. H. FERZIGER, Phys. Fluids **10**, 364 [1967].

⁸ V. N. KOLESNIKOV, Trudy Fiz. Inst. Akad. Nauk SSSR **30**, 66 [1964].

⁹ H. R. GRIEM, Plasma Spectroscopy, McGraw-Hill Book Comp., New York 1964.

¹⁰ S.-I. PAI, Magnetogasdynamics and Plasmadynamics, Springer, Wien 1962.

¹¹ A. B. CAMEL, Plasma Physics and Magnetofluid-Mechanics, McGraw-Hill Book Comp., New York 1963.

¹² H. N. OLSEN, in: Physico-Chemical Diagnostics of Plasmas, Northwestern Univ. Press, Evanston 1963.

¹³ I. BUES, H. J. PATT u. J. RICHTER, Z. Angew. Phys. **22**, 345 [1967].

¹⁴ R. S. DEVOTO, Phys. Fluids **10**, 354 [1967].

theoretisch und experimentell gefundener Werte verschiedener Autoren ergibt im betrachteten Temperaturbereich gute Übereinstimmung. Die spezifische Abstrahlung $u(T)$ wird als Teil dieser Arbeit aus der Energiebilanz am Ort der Temperaturmaxima gewonnen.

2. Spektroskopische Grundlagen

Von großer Bedeutung für die vorliegende Untersuchung ist die Messung der Temperaturverteilung im Bogen. Da der überwiegende Teil des Rohrquerschnitts mit leuchtendem Plasma erfüllt ist, sind spektroskopische Methoden zur Temperaturbestimmung besonders geeignet. Sie stören die Entladung nicht und lassen genaue Temperaturangaben zu; Messungen der absoluten Strahlungsintensitäten einzelner Linien oder des Kontinuums liefern dabei die genauesten Werte.

Ein im vorliegenden Temperaturbereich besonders empfindliches Maß für die Temperatur ist die *spektrale Strahlungsintensität des Kontinuums* $I_{\lambda, K}$, die deshalb zur Messung der Temperaturverteilung herangezogen wurde. Die korrespondenzmäßige KRAMERS-UNSÖLD-Theorie (MAECKER und PETERS¹⁵) wurde in den letzten Jahren verfeinert (BIBERMAN et al.¹⁶⁻¹⁸; SCHLÜTER^{19, 20}) und liefert Werte, die mit experimentellen Ergebnissen aus Messungen am Kaskadenbogen (SCHLÜTER²¹; RICHTER²²; WENDE²³; BAUDER²⁴ u. a.) und am Stoßwellenrohr (BERGE et al.²⁵; RODERS und MEINERS²⁶ u. a.) innerhalb einer Fehlergrenze von etwa $\pm 30\%$ übereinstimmen. Bei Emission aus homogener, optisch dünner Schicht der Länge l ist die spektrale Intensität $I_{\lambda, K}$ des *Gesamtkontinuums* aus Rekombinations- und Bremsstrahlung gegeben durch

$$I_{\lambda, K} = 1,63 \cdot 10^{-35} (n_e^2 / \lambda^2 \sqrt{T}) \cdot l \xi \quad \text{W/cm}^3 \text{ sterad.} \quad (9)$$

Dabei ist ξ der von BIBERMAN eingeführte, dimensionslose Faktor, der die Abweichung vom Wasserstoffmodell beschreibt. Er ist eine Funktion der

¹⁵ H. MAECKER u. T. PETERS, Z. Phys. **139**, 448 [1954].

¹⁶ L. M. BIBERMAN u. G. E. NORMAN, J. Quant. Spectrosc. Radiative Transfer **3**, 221 [1963].

¹⁷ L. M. BIBERMAN et al., Opt. and Spectr. **10**, 297 [1961].

¹⁸ L. M. BIBERMAN u. G. E. NORMAN, Soviet Phys.-Uspekhi **10**, 52 [1967].

¹⁹ D. SCHLÜTER, Z. Astrophys. **61**, 67 [1965].

²⁰ D. SCHLÜTER, Z. Phys. **210**, 80 [1968].

²¹ D. SCHLÜTER, Z. Astrophys. **56**, 43 [1962].

²² J. RICHTER, Z. Astrophys. **61**, 57 [1965].

Wellenlänge, von der Temperatur aber praktisch unabhängig¹⁶⁻²⁰. Die übrigen Größen haben die bekannte Bedeutung.

In der Umgebung der zur Temperaturmessung gewählten Wellenlänge $\lambda = 4460 \text{ \AA}$ hängt der ξ -Faktor nur schwach von λ ab und hat nach den Messungen von WENDE²³ die Größe $\xi(\lambda = 4460 \text{ \AA}) = 2,0 \pm 27\%$; innerhalb dieser Fehlergrenzen liegen auch die in den anderen zitierten Arbeiten angegebenen Werte für ξ . Die Kontinuumsintensität wurde mit diesem Wert für ξ , mit der Elektronendichte nach POPENOE und SHUMAKER²⁷ und der bekannten Schichtdicke $l = 10,5 \text{ cm}$ aus Gl. (9) als Funktion der Temperatur berechnet. Mit Gl. (9) und der bekannten Saha-Gleichung erhält man für die Empfindlichkeit den Ausdruck

$$(\Delta I_{\lambda, K} / I_{\lambda, K}) / (\Delta T / T) = 1 + E_i / k T ,$$

speziell bei $T = 10^4 \text{ }^{\circ}\text{K}$ den Wert 19,3. Für die optische Dicke der Plasmasäule (FINKELNBURG¹) ergibt sich der größte Wert bei $T = 12000 \text{ }^{\circ}\text{K}$ zu $1,3 \cdot 10^{-2} \ll 1$; die Selbstabsorption ist also vernachlässigbar und die Emission erfolgt im gesamten ausgemessenen Temperaturbereich aus optisch dünner Schicht.

Zur vergleichenden Einzelmessung wurde noch die Strahlungsintensität der — nach den üblichen Gesichtspunkten ausgewählten — *Ar I-Linie* bei $\lambda = 4300 \text{ \AA}$ herangezogen. Die Intensität (Strahldichte) I_L ergibt sich aus der bekannten Beziehung (10) (z. B. FINKELNBURG¹):

$$I_L = (h c / 4 \pi \lambda) A_{mn} n_m l. \quad (10)$$

Die Größen haben die übliche Bedeutung. Es wurden für die Übergangswahrscheinlichkeit nach WIESE²⁸ $A_{mn} = 3,82 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$, für die Besetzungsichten n_m die Werte nach POPENOE und SHUMAKER²⁷ und für die Schichtdicke l der in Abschn. 4.2. gefundene Wert $l = 10,5 \text{ cm}$ eingesetzt. Die hier getroffene Voraussetzung der Emission aus optisch dünner Schicht ist nach experimentellen Ergebnissen von BAUDER²⁴ erfüllt.

²³ B. WENDE, Z. Phys. **198**, 1 [1967].

²⁴ U. BAUDER, Z. Phys. **205**, 303 [1967].

²⁵ O. E. BERGE, A. BÖHM u. L. REHDER, Z. Naturforsch. **20 a**, 120 [1965].

²⁶ H. RODERS u. D. MEINERS, Verhandl. DPG (VI) **3**, 437 [1968].

²⁷ C. H. POPENOE u. J. B. SHUMAKER JR., J. Res. Nat. Bur. Stand. A. **69 A**, 495 [1965].

²⁸ W. L. WIESE, VIII. Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Vienna, 447 [1967].

3. Experimenteller Aufbau

3.1. Bogenanordnung

Der Bogen brennt in Argon bei Atmosphärendruck in einer zylindrischen Kaskadenkammer (Abb. 1), die im prinzipiellen Aufbau der von MAECKER und STEINBERGER²⁹ beschriebenen Anordnung entspricht. Sie besteht aus einer Säule von isoliert zusammengesetzten Kupferplatten mit zentralen Bohrungen von 10 mm Durchmesser, die zusammen das Rohr bilden, zwei als Elektroden ausgebildeten Platten und den beiden Endtöpfen als Kaskadenabschluß. Die Platten sind zur Abführung der Bogenwärme wassergekühlt. Die Dichtungsringe zwischen den Platten sind 0,3 mm stark gegenüber 5 mm Plattendicke, so daß die Homogenität der Rohrwand kaum gestört ist. Als Anode dient eine Kaskadenplatte mit eingesetztem Wolframring von 10 mm Innendurchmesser, als Kathode ein in einer Kupferplatte isoliert und gasdicht durchgeföhrter, wassergekühlter Wolframstift. Die Ausbildung einer in axialer Richtung homogenen Bogensäule wird durch ein möglichst großes Verhältnis von Bogenlänge zu Rohrdurchmesser (12:1) und durch eine Verlängerung der Kaskade über die Elektrodenplatten hinaus unterstützt. Gas- und Wasserversorgung erfolgen über die Endtöpfe, die zur „end-on“-Beobachtung des Bogens eine zentrale Bohrung mit Tubus und Fenster haben. Der Gasdruck am Umfang des Rohres kann an speziell ausgebildeten Kaskadenplatten über kleine Bohrungen mit ölfüllten U-Rohr-Manometern gemessen werden.

Der Bogenstrom wird von einer stromgeregelten Gleichrichteranlage geliefert und kann auf etwa 1,5% genau eingestellt werden. Zwei gleiche, stromdurchflossene Spulen (Abb. 1) erzeugen das Magnetfeld; im Bereich des Bogens ist es homogen mit Abweichungen von weniger als 2%. Nach einmaliger Eichung mit einem Gaußmeter von 1% Genauigkeit wird die Stärke

des Magnetfeldes in einfacher Weise durch Regelung des Spulenstroms eingestellt. Das verwendete kartesische Koordinatensystem ist in Abb. 1 eingezeichnet; die Ebene $x=0$ ist Symmetrieebene.

3.2. Optische Mebanordnung

Zur „end-on“-Beobachtung wird der Säulenquerschnitt im Verhältnis 1:1 auf die quadratische Eingangsblende (0,1 x 0,1 mm) eines Prismenmonochromators telezentrisch abgebildet. Eine Lochblende von 1 mm Durchmesser, dem optimalen Wert bezüglich der örtlichen Auflösung unter Berücksichtigung der Beugung, in der bildseitigen Brennebene des abbildenden Objektivs läßt bei einem Öffnungsverhältnis von 1:210 praktisch nur achsenparallele Strahlenbündel durch. Mit Hilfe von Präzisionsverschiebereitern kann das Objektiv und die damit festverbundene Lochblende in x - und y -Richtung (Abb. 1) verschoben werden, wodurch das Bild des Bogenquerschnitts über den Monochromatoreingang wandert und somit „punktweise“ mit einer örtlichen Auflösung von etwa 0,2 mm abgetastet wird. Die vom Monochromator ausgeblendete Strahlung wird mit einem Photomultiplier (Typ 1 P 21 von RCA) gemessen und von einem Schreiber registriert. Zur Eichung der Intensitätsmessungen in Absolutwerten wird die Strahlung des positiven Kraters des Normalkohlebogens nach EULER³⁰ und MAGDEBURG³¹, nachdem er an die Stelle der Kaskadenmitte gebracht worden ist, bei sonst gleichem Strahlengang registriert.

4. Messungen

4.1. Daten der Entladung

Für den Bogen sind folgende Daten kennzeichnend: Bogengas: Argon (99,99%) bei $p_0 = 1$ atm;

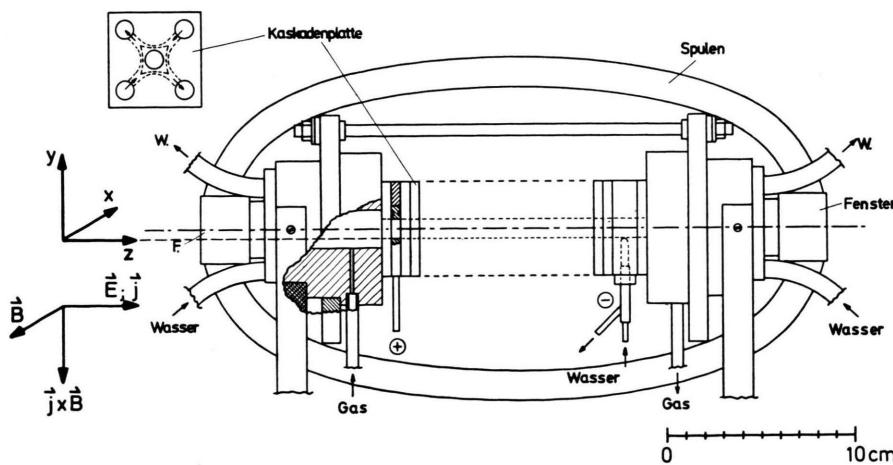


Abb. 1. Schema des Versuchsaufbaus mit dem verwendeten kartesischen Koordinatensystem.

²⁹ H. MAECKER u. S. STEINBERGER, Z. Angew. Phys. **23**, 456 [1967].

³⁰ J. EULER, Ann. Phys. Leipzig **11**, 203 [1953].

³¹ H. MAGDEBURG u. U. SCHLEY, Z. Angew. Phys. **20**, 465 [1966].

Bogenstrom: 20—140 A; Magnetfeld: 25—250 G; maximale Temperatur im Bogen: $12 \cdot 10^3$ °K; maximaler Ionisationsgrad 12%.

Bei Temperaturen $T > 12 \cdot 10^3$ °K kann die Strahlungsabsorption im Bogenplasma nach HERMANN³² nicht mehr vernachlässigt werden, d. h. die zur Auswertung verwendete Form des Strahlungsterms in der Energiegleichung ist dann nicht mehr gültig. Hierdurch wird der Strombereich nach oben begrenzt; eine untere Grenze ist durch die Forderung nach einem Plasma im L.T.G. gegeben. Bei transversalen Magnetfeldern $B > 300$ G treten im Bogen Instabilitäten auf, deren Ursache im Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung zu suchen ist. Aus diesem Grunde werden nur Messungen bei Feldstärken $B \leq 250$ G durchgeführt; in diesem Bereich ist das Strömungsfeld laminar.

Um den Einfluß von Bogenstrom I und Magnetfeld B auf das Temperatur- und Strömungsfeld zu untersuchen, werden Messungen bei verschiedenen Werten für die Parameter I und B durchgeführt:

$\rightarrow B$	$I = 40$ A; $B = 150$ G
$I = 80$ A; $B = 75$ G	$I = 80$ A; $B = 150$ G
	$I = 80$ A; $B = 225$ G
I	$I = 120$ A; $B = 150$ G

Die zentrale Messung erfolgt also bei $I = 80$ A und $B = 150$ G.

4.2. Messung der Temperaturfelder

Die zur Auswertung der Intensitätsmessungen benötigte effektive Dicke der leuchtenden Schicht l (Abschn. 2), die wegen der inhomogenen Zonen an den Säulenenden nicht genau mit der Gesamtsäulenlänge übereinstimmt, wird durch Intensitätsmessungen bei verschiedenen Kaskadenlängen zu $l = 10,5 \text{ cm} \pm 5\%$ ermittelt; der Elektrodenabstand beträgt demgegenüber 12 cm. In Abb. 2 a—e sind die fünf bei den verschiedenen Werten für I und B gemessenen Temperaturfelder wiedergegeben. Die Stufung der eingezeichneten Isothermen beträgt 500 °K; gestrichelte Kurventeile sind ergänzt. Die Messung der Kontinuumsstrahlung liefert für die Maximaltemperatur bei $I = 80$ A und $B = 150$ G (zentrale Messung) den Wert $T_{max,K} = 11270$ °K. Unabhängig davon wird der Maximalwert der Temperatur über die Intensität der Ar I-Linie bei $\lambda = 4300$ Å zu $T_{max,L} = 11300$ °K bestimmt. Die Übereinstimmung

beider Werte bestätigt die Gültigkeit der in Abschn. 1 und 2 genannten Voraussetzungen und die Richtigkeit der verwendeten spektroskopischen Daten.

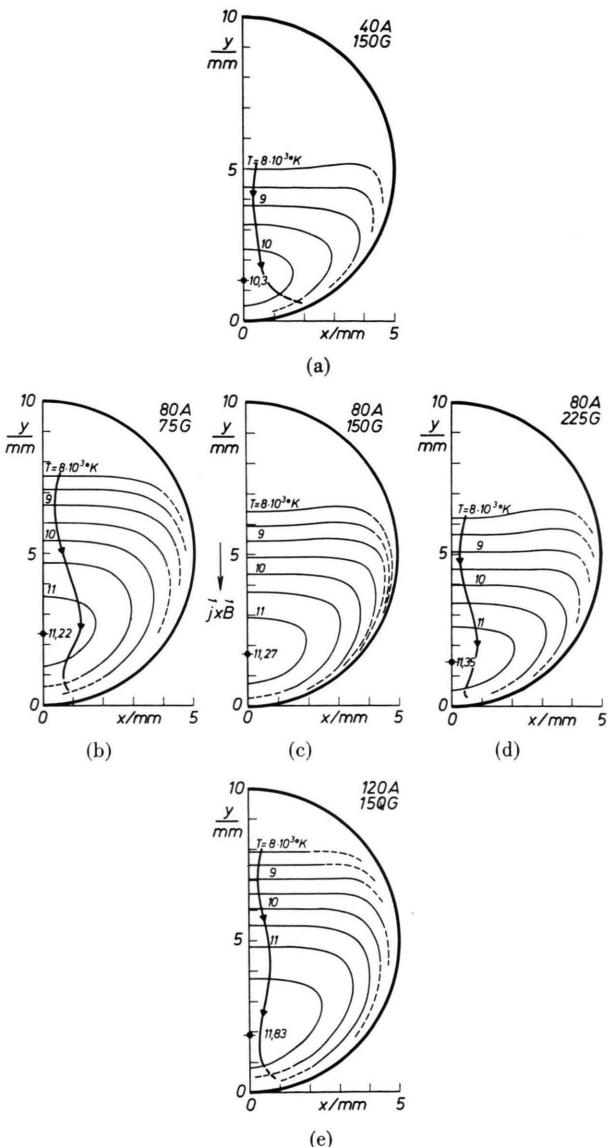


Abb. 2 a—e. Gemessene Temperaturfelder.

Der *maximale Fehler* bei der Temperaturbestimmung aus der Kontinuumsstrahlung kann anhand der Gl. (9) und der Saha-Gleichung abgeschätzt werden. Die verschiedenen Fehlerquellen, insbesondere die Ungenauigkeit des ξ -Faktors ($\Delta\xi/\xi = \pm 27\%$), des Strahlungsnormals ($\Delta I_{\lambda,N}/I_{\lambda,N} = \pm 3\%$) und der Schichtdicke ($\Delta l/l = \pm 5\%$), ergeben für $T = 10^4$ °K einen maximalen Temperaturfehler

³² W. HERMANN, Dissertation, Technische Hochschule München 1967.

$\Delta T/T = \pm 2,1\%$. Die gute Übereinstimmung der über die Kontinuums- und die Linienstrahlung ermittelten Werte für die Maximaltemperatur weist aber darauf hin, daß der tatsächliche Fehler noch wesentlich geringer ist.

Eine summarische Aussage über den Einfluß der Versuchspараметer I und B auf das Temperaturfeld ist die Exzentrizität e des Temperaturmaximums, d. h. seine relative Auslenkung aus der Rohrmitte: $e = 1 - y(T_{\max})/R$; R ist der Rohrradius (Abb. 3 b).

Die in den Abb. 3 a und 3 b wiedergegebenen Abhängigkeiten $e = e(B)$ bei $I = \text{const.}$ und $e = e(I)$ bei $B = \text{konst.}$ sind das Ergebnis mikrophotometrischer Auswertung von „end-on“ aufgenommenen Bogenphotos; mit einem Interferenzfilter wurde dabei ein Spektralbereich von etwa 50 Å um $\lambda = 4460$ Å ausgeschnitten.

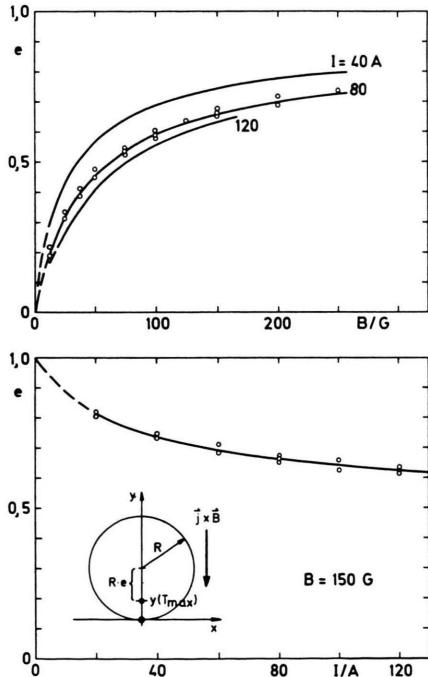


Abb. 3 a. Relative Auslenkung des Temperaturmaximums $e = e(B)$ bei verschiedenen Bogenströmen.

Abb. 3 b. Relative Auslenkung des Temperaturmaximums $e = e(I)$ bei $B = 150$ G.

4.3. Messung der elektrischen Feldstärke

Zur Auswertung der Gln. (8), (2) und (3) muß die elektrische Feldstärke \mathbf{E} bekannt sein. Bei der vorliegenden Geometrie mit $\partial/\partial z = 0$ ist die axial gerichtete Feldstärke \mathbf{E} über dem Bogenquerschnitt

konstant und wird durch eine quasistatische, d. h. sehr hochohmige Messung der Spannung zwischen zwei genügend weit auseinanderliegenden Kaskadenplatten als Sonden bei bekanntem Plattenabstand bestimmt (PLANTIKOW³³). Die Ergebnisse sind in den Abb. 4 a und 4 b wiedergegeben. Der maximale Fehler der Feldstärkemessung beträgt etwa $\pm 3\%$. Die Messung der elektrischen Feldstärke an verschiedenen Stellen der Bogenlänge ergibt eine Aussage über die „elektrische“ Homogenität der Bogensäule; der mittlere Säulenabschnitt ist homogen, in den Säulenenden von jeweils etwa 2 cm Länge steigt E zu den Elektroden hin an; hierdurch wird der für die Messung nutzbare Plattenabstand begrenzt.

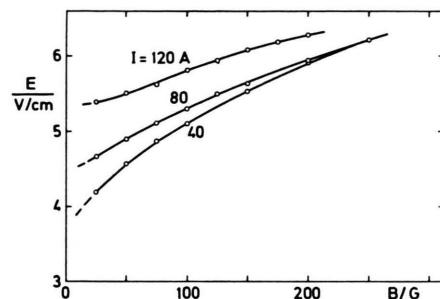


Abb. 4 a. Elektrische Feldstärke $E = E(B)$ mit I als Parameter.

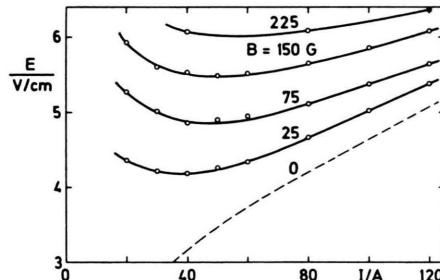


Abb. 4 b. Elektrische Feldstärke $E = E(I)$ mit B als Parameter (Bogencharakteristiken); —— berechnete Kurve.

4.4. Druckmessung

Abb. 5 a zeigt die im homogenen Bereich der Bogensäule gemessene winkelabhängige Druckverteilung an der Kaskadenwand bei einem Bogenstrom von $I = 80$ A mit B als Parameter; Meßkurven bei konstantem B mit I als Parameter verlaufen sehr ähnlich. In den Abb. 5 b und 5 c sind die Abhängigkeiten des bei $\varphi = 0$ gemessenen Staudrucks ($p_s - p_0$) von Bogenstrom und Magnetfeld aufgetragen. Die Genauigkeit der Druckmessung beträgt etwa $\pm 4\%$.

³³ U. PLANTIKOW, Dissertation, Technische Hochschule München 1968, erscheint demnächst in Z. Phys.

Die Messung von $(p_s - p_0)$ am Säulenende ergibt bei $I = 80$ A und $B = 150$ G in 1,3 cm Elektrodenabstand einen Druckabfall von nur 5% gegenüber dem Wert in der Bogenmitte; die Longitudinalkomponente der Strömung ist demnach vernachlässigbar und die „strömungsmäßige“ Homogenität der Bogensäule somit gewährleistet.

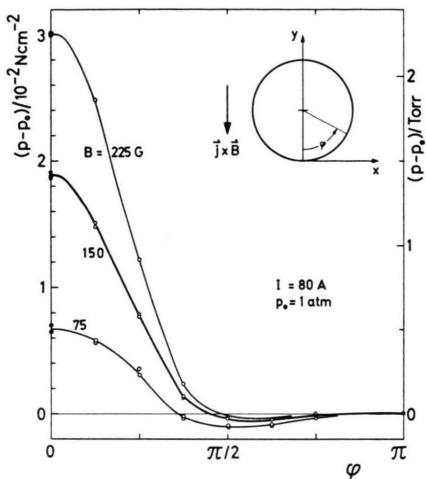


Abb. 5 a. Druckmessung am Umfang der Bogenwand.

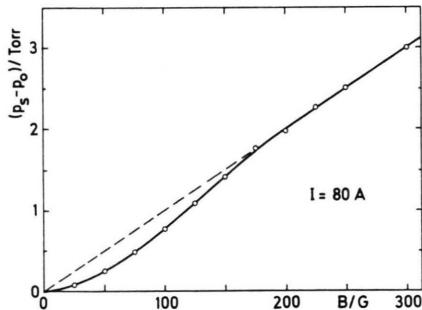


Abb. 5 b. Überdruck im unteren Staupunkt der Strömung ($x=0$; $y=0$) in Abhängigkeit vom Magnetfeld bei konstantem Bogenstrom.

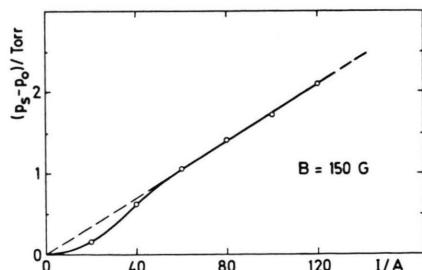


Abb. 5 c. Überdruck im unteren Staupunkt in Abhängigkeit vom Bogenstrom bei konstantem Magnetfeld.

³⁴ H. W. EMMONS, Phys. Fluids **10**, 1125 [1967].

5. Auswertung der Messungen

Die Berechnung des Wärmeleitungsgliedes $\div(\alpha \nabla T)$ in der Energiegleichung Gl. (3), und damit auch die Auswertung der gemessenen Temperaturfelder, werden einfacher, wenn statt der Temperatur T das Wärmestrompotential $S(T) = \int_0^T \alpha \nabla T \cdot dT$ eingeführt wird. Mit dieser Definition und unter Verwendung des Ohmschen Gesetzes Gl. (8) lautet die Energiegleichung:

$$(\rho c_p / \alpha) \mathbf{v} \cdot \nabla S = \sigma E^2 + \Delta S - \mathbf{u}. \quad (3 \text{ a})$$

Die Funktion $S = S(T)$ wird der Arbeit von BUES u. a.¹³ entnommen. Die Felder der partiellen Ableitungen $S_{,x}$; $S_{,y}$; $S_{,xx}$ und $S_{,yy}$ über dem Bogenquerschnitt werden durch numerische Differentiation aus den gemessenen, auf S -Werte umgeformten Temperaturfeldern gewonnen. Die Indizes vor dem Komma bezeichnen bei Vektoren die Komponenten, diejenigen nach dem Komma die partiellen Ableitungen.

5.1. Bestimmung der spezifischen Abstrahlung $u(T)$

Am Ort des Temperaturmaximums liefert das konvektive Glied in der Energiegleichung Gl. (3 a) wegen $\nabla T (T = T_{\max}) = 0$ und damit auch $\nabla S (S = S_{\max}) = 0$ keinen Beitrag. Die elektrische Feldstärke E wird gemessen; somit kann die ohmsche Aufheizung $\sigma(S_{\max})E^2$ berechnet werden. $\Delta S = S_{,xx} + S_{,yy}$ wird aus dem S -Feld ermittelt, sodaß Gl. (3 a) unmittelbar die spezifische Abstrahlung $u(S_{\max})$ liefert, die wegen der Abhängigkeit $S = S(T)$ auch gleich $u(T_{\max})$ ist. Die Auswertung mehrerer Messungen mit verschiedenen Maximaltemperaturen ergibt somit den stark temperaturabhängigen Verlauf von $u(T)$, der mit den von BUES u. a.¹³ und EMMONS³⁴ angegebenen, experimentell ermittelten Werten sehr gut übereinstimmt (Abb. 6); auch eine in BUES u. a.¹³ nach theoretischen ξ -Werten von SCHLÜTER¹⁹ berechnete Kurve liegt im betrachteten Temperaturbereich nur etwa 15% unter den experimentellen Werten. Ein von KNOPP³⁵ unter Verwendung der KRAMERS-UNSOOLD-Theorie und experimentellen Daten von OLSEN berechneter $u(T)$ -Verlauf zeigt stärkere Abweichungen.

³⁵ C. F. KNOPP, Dissertation, Northwestern University, Evanston, Ill., 1965.

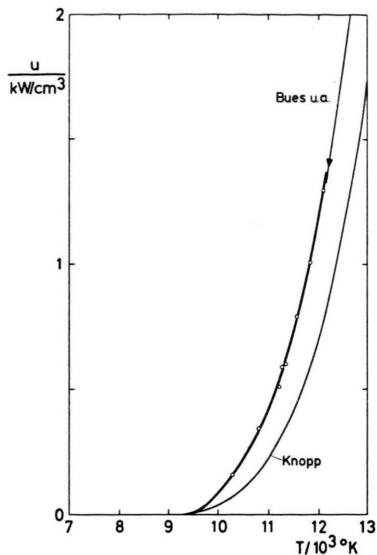


Abb. 6. Temperaturabhängigkeit der spezifischen Abstrahlung $u(T)$.

5.2. Berechnung des Strömungsfeldes

Eine direkte Messung der Gasgeschwindigkeit ist bei den hier vorliegenden Versuchsbedingungen nicht möglich. Für die Beobachtung der Gasströmung mittels eingestreuter Teilchen sind Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zu groß; infolge ihrer Trägheit folgen die Testpartikel nicht mehr der Strömung. Für spektroskopische Methoden der Geschwindigkeitsmessung (Doppler-Verschiebung von Spektrallinien) sind die Geschwindigkeiten noch zu gering, um meßbare Effekte zu ergeben.

Aus dem konvektiven Glied der Energiegleichung kann nur die zu $\text{grad } S$ (bzw. $\text{grad } T$) parallele Komponente der Strömungsgeschwindigkeit berechnet werden. Speziell auf der y -Achse laufen aus Symmetriegründen \mathbf{v} und $\text{grad } S$ in y -Richtung, sind also parallel, so daß Gl. (3 a) dort unmittelbar die Strömungsgeschwindigkeit $v = v_y$ liefert. Das Ergebnis dieser Auswertung für die in Abschn. 4.1. genannten fünf Wertepaare von Bogenstrom und Quermagnetfeld zeigen die Abb. 7 a und 7 b. Am Ort des Temperaturmaximums versagt diese Methode wegen $\text{grad } T = 0$, in der unmittelbaren Umgebung ist sie sehr ungenau. Durch Differentiation der Gl. (3 a) nach y erhält man aber speziell für den Punkt $y_{\max} = y(T_{\max})$ eine einfache Bestimmungsgleichung für $v_y(y_{\max})$:

$$v_y(y_{\max}) = \frac{\varkappa}{c_p} (S_{,xxy} + S_{,yyy}) / \rho c_p S_{,yy}. \quad (11)$$

Die aus Gl. (11) berechneten Werte für $v_y(y_{\max})$, die in den Abb. 7 a und 7 b mit eingezeichnet sind, fügen sich sehr gut in den übrigen Kurvenverlauf ein; demnach sind sogar die dritten — numerisch gebildeten — Ableitungen von S noch zuverlässig.

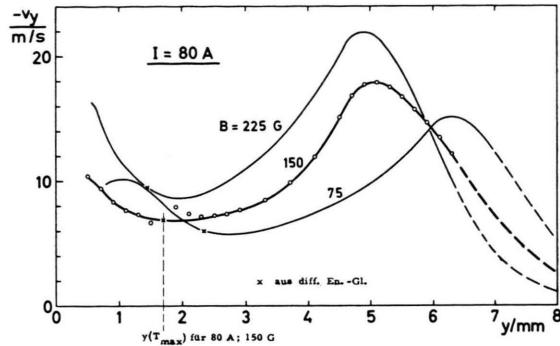


Abb. 7 a. Strömungsgeschwindigkeit $v = v_y$ für Punkte auf der y -Achse bei $I = 80 \text{ A}$ und verschiedenen Werten von B .

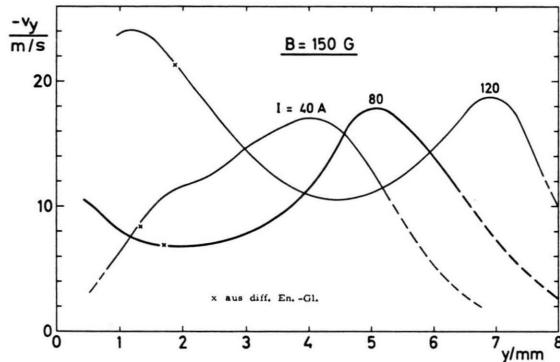


Abb. 7 b. Strömungsgeschwindigkeit $v = v_y$ für Punkte auf der y -Achse bei $B = 150 \text{ G}$ und verschiedenen Werten von I .

Zur Berechnung der zweiten Komponente von \mathbf{v} muß die Kontinuitätsgleichung Gl. (1) hinzugenommen werden. In Komponentenschreibweise ergibt sich so das folgende lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Komponenten ϱv_x und ϱv_y der Massenstromdichte $\varrho \mathbf{v}(x, y)$:

$$\begin{aligned} \varrho v_x S_{,x} + \varrho v_y S_{,y} &= \frac{\varkappa}{c_p} (\sigma E^2 + S_{,xx} + S_{,yy} - u) \\ &\equiv H(x, y) \end{aligned} \quad (12)$$

$$(\varrho v_x)_{,x} + (\varrho v_y)_{,y} = 0$$

Im spektroskopisch ausgemessenen Teil des Rohrquerschnitts sind $S_{,x}$; $S_{,y}$ und H bekannte Ortsfunktionen. Das durch das Gleichungssystem (12) beschriebene Problem ist korrekt („sachgemäß“) gestellt, wenn längs einer „Anfangskurve“, die bestimmten Bedingungen genügen muß, die Variablen

ϱv_x , ϱv_y und ihre ersten partiellen Ableitungen nach x und y gegeben sind; dann hat (12) in einer gewissen Umgebung der „Anfangskurve“ genau eine Lösung (z. B. SAUER³⁶). Mit der y -Achse als Anfangskurve sind diese Voraussetzungen erfüllt. Die Lösung erfolgt von den bekannten Anfangswerten auf der y -Achse aus durch schrittweise Integration in „Streifen“ der Breite Δx parallel zur y -Achse. Ist die Massenstromdichte $\varrho \mathbf{v}$ bis zu einem Wert $x = x_n = n \cdot \Delta x$ für alle y bekannt, so ergibt sich der – exakte – Wert von ϱv_x an der Stelle (x_{n+1}, y_0) aus der Gleichung

$$\varrho v_x(x_{n+1}, y_0) = \varrho v_x(x_n, y_0) + \int_{x=x_n}^{x_{n+1}} (\varrho v_x)_{,x}(x, y_0) dx. \quad (13)$$

Die Integration erfolgt dabei längs einer Geraden $y = y_0$. Da die Funktion $\varrho v_x(x, y_0)$ im Bereich $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ unbekannt ist, muß das Integral in Gl. (13) näherungsweise gelöst werden. Durch die spezielle Wahl des Integrationsweges auf Geraden $y = \text{const.}$ können zur Berechnung dieses Integrals die Methoden der Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen eingesetzt werden (FORSYTHE und WASOW³⁷). Die einfachste, allerdings auch größte Näherung ist das Polygonzugverfahren, bei dem der Integrand in Gl. (13) im betrachteten x -Intervall dem bekannten Wert $(\varrho v_x)_{,x}$ an der Stelle $x = x_n$ gleichgesetzt wird. Ein wesentlich genaueres Verfahren ist die von der Integration gewöhnlicher Diff.-Gl. bekannte Adams-Extrapolation; der Zuwachs der gesuchten Funktion wird dabei aus den Differentialquotienten mehrerer davorliegender Gitterpunkte berechnet. Bei Berücksichtigung von insgesamt drei Gitterpunkten liefert diese Extrapolationsmethode³⁷ folgende bessere Näherung für Gl. 13:

$$\begin{aligned} \varrho v_x(x_{n+1}, y_0) &= \varrho v_x(x_n, y_0) + \frac{1}{12} \Delta x \\ &\cdot [23(\varrho v_x)_{,x}(x_n, y_0) - 16(\varrho v_x)_{,x}(x_{n-1}, y_0) \\ &\quad + 5(\varrho v_x)_{,x}(x_{n-2}, y_0)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Die Überlegenheit dieser Methode im Vergleich mit dem groben Polygonzugverfahren wurde geprüft und auch bestätigt an der Testfunktion $f'(x) = \cos x$, deren Lösungsfunktion $f(x) = \sin x$ in ihrer ersten Halbwelle einen für die x -Abhängigkeit von ϱv_x typischen Verlauf hat.

³⁶ R. SAUER, Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, Springer, Berlin 1952.

Für die zentrale Messung wurde das Feld der Massenstromdichte mit Hilfe der Adams-Extrapolation und zur Abschätzung der Genauigkeit ebenso nach der einfachen Polygonzugmethode mit einer Schrittweite Δx von jeweils 0,4 mm berechnet. Im Bereich $x < 3,2$ mm sind die beiden Lösungen praktisch identisch; für größere x -Werte ergeben sich Abweichungen, die bei $x = 4,0$ mm 10–20% erreichen. Die berechnete Massenstromdichte ist mit einem Fehler behaftet, der von der Ungenauigkeit der Anfangswerte und der numerischen Integration herröhrt. Die Anfangswerte werden aus einer ganzen Reihe von fehlerbehafteten Gliedern berechnet, so daß die Angabe eines maximalen Fehlers nicht sinnvoll erscheint. Der durch die numerische Integration hinzukommende Fehler ist schwer abzuschätzen, doch weist die gute Übereinstimmung der beiden Lösungen darauf hin, daß der „numerische“ Fehler nur in den äußeren Bereichen großer x -Werte einige Prozent übersteigen dürfte.

Zur graphischen Darstellung des Strömungsfeldes eignet sich das *Stromlinienbild*. Aus den Komponenten der Massenstromdichte kann das Richtungsfeld der Strömung und hieraus durch graphische Integration das Strömungsfeld selbst gewonnen werden; genauer ist jedoch eine numerische Integration unter Verwendung der Stromfunktion $\Psi(x, y)$ der Massenstromdichte. Wegen $\operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = 0$ und $\partial/\partial z = 0$ (ebenes Problem) gilt der Ansatz:

$$\begin{aligned} \varrho \mathbf{v} &= \operatorname{rot} \mathbf{e}_z \Psi - \mathbf{e}_x \Psi_{,y} + \mathbf{e}_y (-\Psi_{,x}) \\ \text{also} \quad \varrho v_x &= \Psi_{,y} \quad \text{und} \quad \varrho v_y = -\Psi_{,x}. \end{aligned} \quad (15)$$

Die Stromlinien sind bekanntlich die Kurven $\Psi(x, y) = \text{const.}$ Nach (15) sind mit $\varrho v_x(x, y)$ und $\varrho v_y(x, y)$ auch $\Psi_{,x}(x, y)$ und $\Psi_{,y}(x, y)$ bekannt. Die Stromfunktion $\Psi(x, y)$ selbst erhält man z. B. aus $\varrho v_y(x, y)$ nach (15) durch Integration längs einer Geraden $y = y_0$:

$$\Psi(x_2, y_0) - \Psi(x_1, y_0) = - \int_{x=x_1}^{x_2} \varrho v_y(x, y_0) dx. \quad (16)$$

Die Integration von der y -Achse ($\Psi = 0$) aus ergibt das in Abb. 8 gezeigte Stromlinienbild. Die Ψ -Werte benachbarter Stromlinien unterscheiden sich um jeweils 3 mg/cm s. Zur Orientierung sind einige Isothermen miteingezeichnet. Das Integral in Gl. (16)

³⁷ G. E. FORSYTHE u. W. R. WASOW, Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations, J. Wiley & Sons, New York 1965.

stellt den Massenstrom zwischen den Punkten (x_1, y_0) und (x_2, y_0) dar, der demnach in einfacher Weise durch die Differenz der Ψ -Werte in diesen Punkten bestimmt ist. Für die übrigen Parameterpaare $(I; B)$ ist jeweils die innerste Stromröhre mit einem Massenstrom von ebenfalls 3 mg/s pro cm Säulenlänge in den Abb. 2 a—e miteingezeichnet.

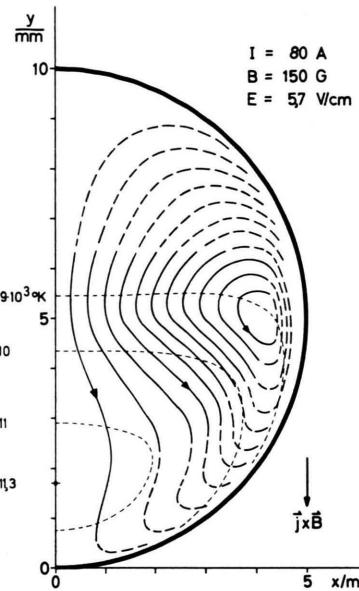


Abb. 8. Ausgewertetes Stromlinienbild bei $I=80 \text{ A}$ und $B=150 \text{ G}$; jede Stromröhre führt einen Massenstrom von 3 mg/s pro cm Säulenlänge.

5.3. Auswertung der Impulsgleichung

Bei bekanntem Strömungsfeld kann aus der Impulsgleichung Gl. (2) der Druckgradient in jedem Punkt des Bogenquerschnitts berechnet werden. Da sich die Zähigkeit η im vorliegenden Temperaturbereich nur um $\pm 4\%$ um einen Mittelwert $\bar{\eta} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm s}$ ändert (DEVOTO¹⁴), kann $\eta = \bar{\eta} = \text{const}$ gesetzt werden, wodurch sich der Reibungsterm in Gl. (2) stark vereinfacht zu

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\eta = \text{const}) = \bar{\eta} \cdot [\frac{2}{3} \text{ grad div} \boldsymbol{v} - \text{rot rot} \boldsymbol{v}]. \quad (17)$$

Rechnet man den Trägheitswiderstand des beschleunigten Gases — als D'Alembert-Kraft — zu den vorhandenen Kräften physikalischen Ursprungs dazu, dann halten sich die an einem beliebigen Volumenelement angreifenden Kräfte das Gleichgewicht. Die partiellen Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y werden numerisch bestimmt. Abbildung 9 zeigt für $I = 80 \text{ A}$; $B = 150 \text{ G}$

das lokale Kräftegleichgewicht in fünf Punkten des Bogenquerschnitts; einige Stromlinien skizzieren den Verlauf des Strömungsfeldes. Für Punkte auf der y -Achse verschwinden die x -Komponenten sämtlicher Kräfte. Die Auswertung der Impulsgleichung ergibt den in Abb. 10 gezeigten Verlauf des Druckgradienten; die Lorentz-Kraft $j \cdot B = \sigma EB$ ist miteingezeichnet. Trägheits- und Reibungskräfte sind etwa von der gleichen Größe und betragen im überwiegenden Teil des ausgewerteten Bereichs im Mittel nur etwa $5\text{--}10\%$ des Druckgradienten. Durch Aufintegrieren des Druckgradienten erhält man den Druck selbst (Abb. 10).

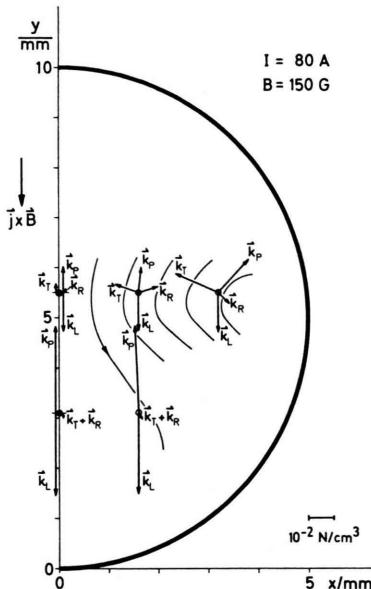


Abb. 9. Lokale Impulsbilanz in einigen Punkten „o“ des Bogenquerschnitts; folgende Kräfte (pro Volumeneinheit) stehen im Gleichgewicht: die Lorentz-Kraft \mathbf{k}_L , die D'Alembert-Kraft \mathbf{k}_T und die durch Druck und Reibung übertragenen Kräfte \mathbf{k}_P und \mathbf{k}_R .

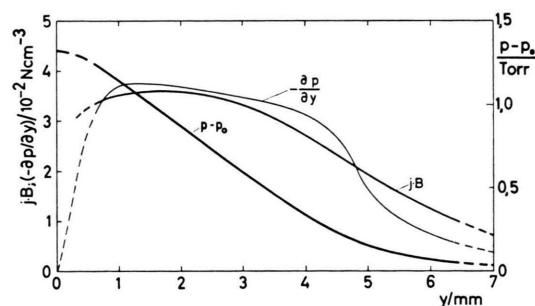


Abb. 10. Verlauf von Lorentz-Kraft, Druckgradient und Druck auf der y -Achse.

5.4. Integrale Kontrollen

Durch einige integrale Kontrollen können die Meßergebnisse in gewissem Maße geprüft werden.

1. Für den Druck im Punkt (0,0), dem unteren Staupunkt der Strömung, erhält man durch Aufintegrieren des — aus der Impulsgleichung berechneten — Druckgradienten längs der y -Achse einen Wert (Abb. 10), der nur um 6% vom direkt gemessenen Druck (Abb. 5 a—c) abweicht.

2. Die Berechnung des Gesamtstroms durch Integration der Stromdichte über den Bogenquerschnitt — $\mathbf{j}(x, y)$ wird aus dem Ohmschen Gesetz berechnet — ergibt einen Wert von $I = \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = 83,2 \text{ A}$, also ebenfalls gute Übereinstimmung mit dem vorgegebenen Bogenstrom von 80 A (4% Abweichung).

3. Eine integrale Energiebilanz ergibt sich durch Integration der Energiegleichung Gl. (3 a) über ein Volumen V der Bogensäule. Nach Umformung des konvektiven Terms und des Wärmeleitungsglieds in Oberflächenintegrale erhält man unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung und der Beziehung $(c_p/\kappa) \text{grad } S = \text{grad } h$ (h = Enthalpie/Masseneinheit)

$$\oint_F h \varrho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = E^2 \int_V \sigma dV + \oint_F \text{grad } S \cdot d\mathbf{f} - \int_V u dV; \quad (18)$$

dabei ist F die Hüllfläche des betrachteten Volumens V . Wählt man als Volumen einen Zylinder mit einer Isotherme als Mantel- und Ebenen $z = \text{const}$ als Deck- und Bodenfläche, dann liefert die linke Seite von Gl. (18) keinen Beitrag wegen $\mathbf{v} \perp d\mathbf{f}$ auf den Endflächen und $h = h(T) = \text{const}$, also $\oint_M \varrho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$ gleich Null auf der Mantelfläche M (Massenerhaltung). Die Glieder der rechten Seite können aus der gemessenen Temperaturverteilung und der elektrischen Feldstärke unter Verwendung der bekannten Materialfunktionen durch numerische Integration berechnet werden. Bei der zentralen Messung ergibt die Auswertung für das von der $11\,000 \text{ }^\circ\text{K}$ -Isotherme eingeschlossene Bogenvolumen der Höhe Eins für die pro Zeiteinheit zugeführte elektrische Energie $E^2 \int_V \sigma dV = 87,5 \text{ W/cm}$, für die pro Zeiteinheit durch Wärmeleitung und Strahlung insgesamt abgeführte Energie

$$\oint_F \varrho \text{grad } S \cdot d\mathbf{f} - \int_V u dV = -89,0 \text{ W/cm.}$$

Die Energiebilanz Gl. (18) ist also mit einer Genauigkeit von etwa 2% sehr gut erfüllt.

4. Durch Integration der Impulsgleichung Gl. (2) über das Bogenvolumen V der Höhe Eins läßt sich eine integrale Impulsbilanz aufstellen:

$$\begin{aligned} \int_V \varrho (\mathbf{v} \text{ grad } \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{V} &= - \int_V \text{grad } p \cdot d\mathbf{V} + \int_V [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{V} \\ &\quad + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{V}. \end{aligned} \quad (19)$$

Durch Umformung der Einzelintegrale — außer $\int_V [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{V}$ — in Oberflächenintegrale, die über die gesamte Hüllfläche F des herausgegriffenen Volumens zu erstrecken sind, erhält man:

$$\oint_F \varrho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}) = - \oint_F p d\mathbf{f} + \int_V [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{V} + \oint_F \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{f}. \quad (20)$$

Eine Abschätzung ergibt, daß der durch Reibung übertragene Impuls $\oint_F \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{f}$ vernachlässigt werden kann. Wegen $\mathbf{v} = 0$ an der Bogenwand und $\mathbf{v} \perp d\mathbf{f}$ auf den Endflächen des betrachteten Zylinders liefert die linke Seite von Gl. (20) keinen Beitrag. $\mathbf{K}_L = \int_V [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{V}$ ist die resultierende Lorentz-Kraft auf

die Längeneinheit der stromführenden Bogensäule im Magnetfeld, weist in negative y -Richtung und berechnet sich mit $I = 80 \text{ A}$; $B = 150 \text{ G}$ zu $K_L = -IB = -1,2 \cdot 10^{-2} \text{ N/cm}$. Der verbleibende Term $\mathbf{K}_P = -\oint_F p d\mathbf{f}$ gibt den durch Druck pro Zeiteinheit durch die Oberfläche übertragenen Impuls an und kann durch numerische Integration über den gemessenen Druckverlauf längs der Bogenwand (Abb. 5 a) berechnet werden. Die Beiträge in x -Richtung heben sich auf, für die y -Komponente erhält man den Wert $K_P = +1,17 \cdot 10^{-2} \text{ N/cm}$. Die integrale Impulsbilanz Gl. (20) $K_P + K_L = 0$ ist also sehr gut erfüllt; die Werte für K_P und K_L weichen nur um 2,5% voneinander ab.

6. Berechnung der Temperaturverteilung für $\mathbf{B}=0$

Zur Ergänzung der beschriebenen Messungen wird noch das Temperaturfeld des unabgelenkten Bogens berechnet. Für den Fall $B=0$ existiert kein Strömungsfeld; der Bogen weist dann Zylinder-Symmetrie auf und die Energiegleichung Gl. (3 a) vereinfacht sich in Zylinderkoordinaten zu

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dS(r)}{dr} \right) = \sigma(S(r)) E^2 - u(S(r)). \quad (21)$$

Die Lösung dieser Gleichung unter Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingungen stellt die ge-

suchte S - bzw. T -Verteilung über dem Bogenquerschnitt dar. Nach einem von PLANTIKOW³⁸ beschriebenen numerischen Verfahren werden S -Verteilung, elektrische Feldstärke und Bogenstrom für verschiedene Achsenwerte des Wärmestrompotentials berechnet.

Das Ergebnis der Rechnung zeigt Abb. 11. Ein Vergleich der berechneten Achsentemperatur bei $I = 80$ A mit dem auf $B = 0$ extrapolierten Wert der gemessenen Maximaltemperaturen für $I = 80$ A bei verschiedenen Werten von B ergibt bei einem Unterschied von nur 3% befriedigende Übereinstimmung.

Die berechnete Bogencharakteristik $E = E(I)$ für $B = 0$ ist in Abb. 4 b mit eingezeichnet; ihr Verlauf fügt sich der gemessenen Kurvenschar sehr gut ein.

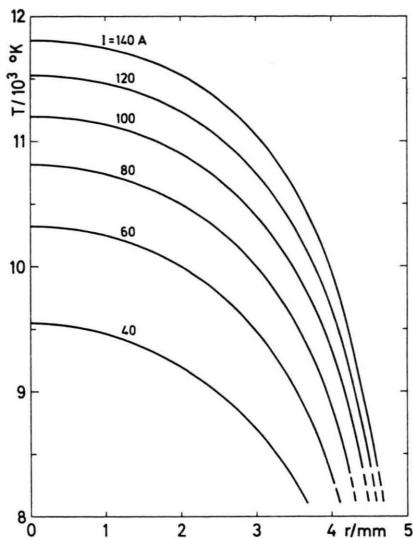


Abb. 11. Berechnete Temperaturverteilung für $B=0$.

7. Diskussion der Ergebnisse

Die Verformung des *Temperaturfeldes* nimmt erwartungsgemäß mit steigendem Quermagnetenfeld zu und ist um so stärker ausgeprägt, je niedriger der Bogenstrom ist. Bei größeren Stromstärken ist der leitfähige Bogenquerschnitt größer und das konvektive Glied — die Gasströmung ist ja letzten Endes für die Bogenverschiebung verantwortlich — spielt wegen der höheren Temperatur und der damit verbundenen niedrigeren Dichte gegenüber den ande-

ren Gliedern eine weniger wichtige Rolle in der Energiegleichung. Die in Abb. 3 a aufgetragene relative Auslenkung e lässt bei kleinen Werten von B eine starke Abhängigkeit vom Magnetfeld, mit steigendem B ein immer mehr asymptotisches Verhalten erkennen und zeigt den „stabilisierenden“ Einfluß wachsender Bogenstromstärke, der auch in der $e(I)$ -Abhängigkeit von Abb. 3 b zum Ausdruck kommt. Die Maximaltemperatur selbst ist praktisch unabhängig vom angelegten Magnetfeld; die mit zunehmendem B wachsende ohmsche Aufheizung $I \cdot E$ pro cm Bogensäule (Abb. 4 a) wird offenbar durch eine intensivere Kühlung des Bogenplasmas infolge der Gasströmung weitgehend wettgemacht. Diese Erhöhung der elektrischen Feldstärke mit wachsendem Magnetfeld B ist einmal durch die Verringerung des Entladungsquerschnitts (Abb. 2 a — e), zum andern durch die erwähnte zusätzliche konvektive Kühlung bedingt. Die Auswertung der Energiegleichung ergibt, daß die anteilige Zusammensetzung des Energietransports zwar von Ort zu Ort verschieden ist, daß aber die verschiedenen Transportmechanismen etwa die gleiche Größenordnung erreichen.

Das *Strömungsfeld* ist erwartungsgemäß von Bogenstrom und Magnetfeld abhängig. Die Auswertung der zentralen Messung (Abb. 8) zeigt das grundsätzliche Verhalten: Der Bogen wird — hier speziell etwa in Höhe der 9000 °K-Isotherme — in fast der ganzen Bogenbreite parallel angeströmt. Das Gas durchströmt den stark aus der Rohrmitte verschobenen heißen Bogenkern nur zu einem geringen Teil, expandiert und umströmt diesen Bereich vielmehr wie ein materielles Hindernis. Die Temperatur- und die davon abhängige DichteVerteilung über dem Bogenquerschnitt ist also von entscheidendem Einfluß auf das Strömungsfeld. Die Rückströmung in Wandnähe weist hohe Massenstromdichte auf; die Gasgeschwindigkeit selbst ist wegen der niedrigeren Temperatur und der damit verbundenen höheren Dichte von der gleichen Größenordnung wie im Bogeninnern. Vom oberen Staupunkt aus strömt das Gas längs der Symmetriechse (y -Achse) mit zunächst steigender Geschwindigkeit in Richtung der Lorentz-Kraft, wird aber durch den Druckberg, der sich an der Gefäßwand im unteren Staupunkt aufbaut (Abb. 10), mehr und mehr abgebremst. Der Maximalwert, den v_y erreicht, wird im wesentlichen durch das Magnetfeld bestimmt (Abb. 7 a) und hängt nur schwach vom Bogenstrom ab (Abb. 7 b). Infolge der großen Kraftdichte $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ und der klei-

³⁸ U. PLANTIKOW³³. — Herrn Dr.-Ing. U. PLANTIKOW gilt mein besonderer Dank für die Überlassung des Computerprogramms, das für das vorliegende Problem durch Einbeziehung des Strahlungsterms erweitert wurde.

nen Massendichte ϱ im Bereich hoher Temperatur erfolgt eine erneute Beschleunigung, die zur Ausbildung eines zweiten Geschwindigkeitsmaximums führt; bei hohen Bogenströmen ist es besonders stark ausgeprägt, bei niedrigen verschwindet es (Abb. 7 b). Die Umströmung des heißen Bogenkerns ist mit abnehmender Stromstärke immer weniger ausgeprägt.

Die Auswertung der Impulsgleichung ergibt, daß im überwiegenden Teil der stromführenden Bogen säule die Lorentz-Kräfte im wesentlichen durch den Druckgradienten aufgefangen werden (Abb. 9 und 10). Die Gasströmung spielt demnach in der Impulsgleichung eine weniger wichtige Rolle; in der Energiegleichung hingegen ist sie für die Verschiebung des Temperaturmaximums aus der Rohrmitte verantwortlich. In den äußeren Bogenbereichen sind die Änderungen der Strömungsgeschwindigkeit beträchtlich; dort kommen die Trägheits- und Reibungskräfte in die Größenordnung der Lorentz- und Druckkräfte; die Trägheitskräfte wirken dabei fast ausschließlich als Zentrifugalkräfte (Abb. 9).

Die Druckmessung am Kaskadenumfang ermöglicht eine pauschale Aussage über die Bedeutung der Gasströmung in der Impulsbilanz, abhängig von den Parametern I und B . Die Ausbildung eines

Unterdrucks ist ein typisch strömungsmechanischer Effekt, der nach Abb. 5 a bei konstantem Bogenstrom mit steigendem Magnetfeld immer mehr zurückgeht, d. h. mit wachsendem B übernehmen Lorentz-Kraft und Druckgradient mehr und mehr die Hauptrolle in der Impulsgleichung. Die gleiche Tendenz ist für $B = \text{const}$ bei wachsendem Bogenstrom zu beobachten. Der Übergang des im unteren Staupunkt der Strömung gemessenen Überdrucks ($p_s - p_0$) in einen zu B oder I proportionalen Verlauf bei größeren Parameterwerten (Abb. 5 b und 5 c) ist auch ein gewisser Hinweis auf die abnehmende Bedeutung der Strömung in der Impulsbilanz mit zunehmendem Magnetfeld oder Bogenstrom.

Aus der Konsistenz der Ergebnisse, insbesondere der integralen Kontrollen in Abschn. 5.4., darf mit großer Wahrscheinlichkeit auf die Richtigkeit der Messungen und Auswerteverfahren sowie auf die Gültigkeit der verwendeten Materialfunktionen geschlossen werden.

Mein aufrichtiger Dank gilt Herrn Prof. Dr. H. MAECKER für die Anregung zu dieser Arbeit und seine ständige Förderung durch wertvolle Ratschläge und Diskussionen. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die finanzielle Unterstützung.